Lógica Matemática

07 *Lógica proposicional: Conjuntos adequados de conectivos*■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Conjuntos adequados de conectivos

DEFINIÇÃO: Um conjunto adequado de conectivos é um conjunto a partir do qual toda função verdade pode ser representada por uma fórmula que contém apenas os conectivos presentes neste conjunto.

Exemplo: No vídeo passado vimos que (resultado 1-V6) toda função verdade é a função verdade determinada por uma fórmula restrita, ou seja, uma fórmula que utiliza apenas o conectivos $\neg$, & e $\vee$.

Portanto, o conjunto $\{\neg, \&, \vee\}$ é um conjunto adequado de conectivos (algumas vezes direi que simplesmente é adequado).

Outros conjuntos adequados de conectivos

Resultado 1: Os seguintes conjuntos são conjuntos adequados de conectivos:

a) $\{\neg, \&\}$

b) $\{\neg, \vee\}$

c) $\{\neg, \rightarrow\}$

A demonstração deste resultado parte do fato de que já sabemos que o conjunto $\{\neg, \&, \vee\}$ é adequado.

Outros conjuntos adequados de conectivos

Resultado 1: Os seguintes conjuntos são conjuntos adequados de conectivos:

Demonstração:

a) Vamos eliminar primeiramente o operador ∨ do conjunto $\{\neg, \&, \lor\}$.

Para isso, basta encontrar uma fórmula que seja logicamente equivalente a $(A \lor B)$.

Veja: $A \lor B$ é logicamente equivalente a $\neg(\neg(A \lor B))$.

Pela lei de De Morgan, essa última fórmula é equivalente a $\neg\big((\neg A)\&(\neg B)\big)$.

Assim, temos que o conjunto $\{\neg, \&\}$ é adequado.

Outros conjuntos adequados de conectivos

Resultado 1: Os seguintes conjuntos são conjuntos adequados de conectivos:

Demonstração:

b) Vamos eliminar agora o operador & do conjunto $\{\neg, \&, \lor\}$.

Para isso, basta encontrar uma fórmula que seja logicamente equivalente a $(A \& B)$.

Veja: $(A \& B)$ é logicamente equivalente a $\neg(\neg(A\&B))$.

Pela lei de De Morgan, essa última fórmula é equivalente a $\neg\big((\neg A) \lor (\neg B)\big)$.

Assim, temos que o conjunto $\{\neg, \lor\}$ é adequado.

Outros conjuntos adequados de conectivos

Resultado 1: Os seguintes conjuntos são conjuntos adequados de conectivos:

Demonstração:

c) Por fim, vamos encontrar fórmulas que sejam logicamente equivalentes a $(A \,\&\, B)$ e $(A \vee B)$ e que só usam os operadores ¬, →.

Ideia: se ocorre A, então B deve ocorrer. Logo, não pode acontecer de ocorrer A e não ocorrer B.

$(A \,\&\, B)$ é logicamente equivalente a $\neg\big(A \rightarrow (\neg B)\big)$.

Obs.: Testem pela tabela verdade.

Outros conjuntos adequados de conectivos

Resultado 1: Os seguintes conjuntos são conjuntos adequados de conectivos:

Demonstração:

c) Por fim, vamos encontrar fórmulas que sejam logicamente equivalentes a $(A \mathbin{\&} B)$ e $(A \vee B)$ e que só usam os operadores $\neg, \rightarrow$.

Ideia: A pode ocorrer ou não. Se A ocorre, está ok. Agora, se A não ocorre, então isto implica que B deve necessariamente ocorrer.

$(A \vee B)$ é logicamente equivalente a $\left((\neg A) \rightarrow B\right)$.

Mostramos que o conjunto $\{\neg, \rightarrow\}$ é adequado.■

Observações

- Existem outros operadores lógicos, como o NOR e o NAND, que cada um por si só é um conjunto (unitário) adequado.
- Lembrando dos nossos conectivos: $\{\neg, \ \&, \ \vee, \rightarrow, \ \leftrightarrow\}$.
  - Não existe um conjunto adequado de conectivos sem o operador de negação.
  - Suponha que uma função verdade assume somente o valor F. Uma fórmula que expressa essa função deve conter o operador de negação, pois se atribuirmos o valor V a todas as variáveis proposicionais, deveria assumir o valor V, e não F como desejado.
- Será que $\{\neg, \leftrightarrow\}$ é adequado?

Lógica Matemática

07 *Lógica proposicional: Conjuntos adequados de conectivos*■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br